INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MARAMUREŞ

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală – 28 februarie 2015
clasa a X – a
Filiera tehnologică –Profil tehnic – toate specializările profesionale

1.

a) Fie x, y, z$\in R$ astfel încât $2^x+2^y=2^z$. Arătați că:

i) x, y, z nu pot fi toate egale;

ii) există o infinitate de numere întregi astfel încât $2^x+2^y=2^z$.

b) Dacă x, y, z$\in R$ asfel încât x, z, y nu sunt în progresie aritmetică (în ordinea dată), atunci:

$2^x+2^y > 2^{z+1}$ sau $2^{x+z} + 2^{y+z} > 2^{x+y+1}$.

2.

a) Dacă $x = \log_{15} a\,, y = \log_{21} a\,, z = \log_{35} a,$ atunci are loc egalitatea:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\log_3 a}+\frac{1}{\log_5 a}+\frac{1}{\log_7 a} \quad ,a > 0, a \neq 1$$

b) Să se arate că:

$$\left[2^{\log_2 n-\log_2(n+1)+\log_2(n+2)}\right] = n\ ,(\forall)\ n \in N^*$$

unde [x] - partea întreagă.

3.

a) Dacă ε este o soluţie a ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$, atunci calculați

$$(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2)(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon)$$

b) Fie ecuația $a^2z^2 + abz + c^2 = 0$ a, b, c $\in C^*$ și z_1, z_2 soluțiile sale.

Demonstrați că, dacă $\frac{b}{c} \in R,$ atunci $|z_1| = |z_2|$ sau $\frac{z_1}{z_2} \in R.$

4.

a) Calculați

$$((((((((i+1)^2-i)^4+i)^2-i)^4+i)^2-i)^4+i)^2-i)^4$$

b) Determinați numerele complexe z cu proprietățile $\left|\frac{z+3}{z-3}\right| = 1$ și $\left|\frac{z-3i}{z+3i}\right| = 2$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu note de la 0 la 7.

Timp de lucru 3 ore.

Subiectele au fost propuse şi selectate de către:

prof. Pop Mariana Liceul Teoretic ”Petru Rareş” Târgu Lăpuş

prof. Ionaş Mirela Liceul Teoretic ”Petru Rareş” Târgu Lăpuş

prof. Leşe Teodor Liceul Teoretic ”Petru Rareş” Târgu Lăpuş